Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Barbora Baňasová

Náhodná procházka

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Marek Omelka, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2012

Na tomto mieste by som sa rada poďakovala za pomoc pri práci predovšetkým môjmu vedúcemu, Ing. Marekovi Omelkovi, Ph.D., ktorý mi bol vždy ochotný poradiť.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 25.5.2012 Barbora Baňasová

Název práce: Náhodná procházka

Autor: Barbora Baňasová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Marek Omelka, Ph.D.

Abstrakt: Náhodná prechádzka je známy matematický model využívaný v rôznych vedeckých odvetviach. Cieľom tohto textu je vysvetliť a ukázať vzťah medzi základnými vlastnosťami jednoduchej náhodnej prechádzky. Práca zhŕňa viaceré teoretické poznatky o tejto matematickej štruktúre z pohľadu jej symetrickej i nesymetrickej verzie. Zaoberá sa odvodením absorpčných pravdepodobností, pravdepodobnosti prvého aj opakovaného návratu do nuly a klasifikáciou stavov jednoduchej náhodnej prechádzky. V záverečnej časti je náhodná prechádzka predstavená v širších súvislostiach ako martingal. Je ukázané za akých podmienok je náhodná prechádzka martingalom a akým spôsobom je možné túto všeobecnejšiu matematickú štruktúru aplikovať na model náhodnej prechádzky.

Kľúčové slova: náhodná prechádzka, trvalosť, absorpčné pravdepodobnosti, martingal

Title: Random Walk

Author: Barbora Baňasová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Ing. Marek Omelka, Ph.D.

Abstract: Random walk is a well-known mathematical model used in various scientific fields. The aim of this thesis is to explain and to show the relation between the basic characteristics of simple random walk. The paper summarizes theoretical knowledge concerning this mathematical model in terms of its symmetrical or asymmetrical version. It deals with the derivation of absorbing probabilities, probability of the first and repeated return to origin and clasification of simple random walk states. The final part presents random walk in a wider perspective as a martingale. The conditions under which a random walk equals a martingale are established as well. It is also shown how it is possible to apply this more general mathematical structure on the model of random walk.

Keywords: random walk, recurrence, absorbing probabilities, martingale

Obsah

Úvod

Náhodná prechádzka je jedným z najznámejších matematických modelov. Kvôli svojej jednoduchosti a názornosti je často využívaná ako príklad ilustrácie mnohých vlastností náhodných procesov. No jej uplatnenie je nielen teoretické, ale s úspechom sa využíva aj vo viacerých praktických aplikáciách, napríklad pri sledovaní zákazníkov na trhu, či modelovaní počtu áut čakajúcich v radoch na parkoviskách v päťminútových intervaloch.

Okrem iného je náhodná prechádzka aj podporným nástrojom vo viacerých vedných oboroch, nech už sa jedná o fyziku, ekonómiu alebo napríklad biológiu. Viac informácií o jej využití je možné nájsť v [2], [6] alebo [13].

Táto práca má za cieľ ukázať a vysvetliť základné vlastnosti náhodnej prechádzky. V prvých dvoch kapitolách uvádzame pohľad, ktorý je prezentovaný vo väčšine odbornej literatúry venovanej náhodným prechádzkam. Z toho dôvodu s ním čitateľa oboznámime a uvedieme základné postupy a výsledky.

Na začiatku sa budeme zaoberať štandardným kombinatorickým prístupom k náhodnej prechádzke. Ukážeme akým spôsobom je možné využiť počítanie ciest na grafe a princíp reflexie pri práci so symetrickou náhodnou prechádzkou a vysvetlíme základnú klasifikáciu jej stavov.

V druhej kapitole objasníme pojem nesymetrickej náhodnej prechádzky na príklade hráča v kasíne a odvodíme absorpčné pravdepodobnosti.

V závere od tohoto klasického prístupu upustíme. Pokúsime sa ukázať spojitosť medzi teóriou martingalov a náhodnou prechádzkou. Zistené súvislosti budeme aplikovať na model náhodnej prechádzky s cieľom predviesť iný prístup k jej štúdiu.

1. Náhodná prechádzka

1.1 Stochastické procesy

Definícia 1.1 *Nech T je neprázdna množina. Stochastický (náhodný) proces $\{X_t, t \in T\}$ je neprázdny systém náhodných veličin definovaných na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*

Indexová množina T je obvykle usporiadaná a má význam času. Predstavuje veľmi dôležitý parameter pri rozlišovaní jednotlivých náhodných procesov. Ak $T \subseteq \mathbb{Z}$, potom hovoríme o náhodnom procese s diskrétnym časom, napríklad $T = \{0, 1, 2, ...\}$. V prípade, že $T \subseteq \mathbb{R}$, potom ide o náhodný proces s časom spojitým, kde T býva často rovné intervalu $[0, \infty)$. Podobne sa rozlišujú náhodné procesy z hľadiska stavov, môžu byť diskrétne v prípade, že $\forall t \in T$ je X_t diskrétna náhodná veličina, respektíve môžu byť spojité a to v prípade, že $\forall t \in T$ je X_t spojitá náhodná veličina. Realizácia náhodného procesu spočíva vlastne v priradení každému $t \in T$ hodnotu X_t. Podľa definície v nasledujúcej podkapitole uvidíme, že náhodná prechádzka patrí k stochastickým procesom s diskrétnym časom aj stavom.

Predtým ako sa pustíme do výkladu o náhodnej prechádzke, definujme ešte jeden pojem, ktorý sa ukáže veľmi užitočný, neskôr pri zavádzaní teórie o martingaloch.

Definícia 1.2 *Nech $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Podmienená stredná hodnota X pri $\mathcal{F}$ je náhodná veličina $E[X|\mathcal{F}]$, ktorá spĺňa:*

- $E[X|\mathcal{F}] \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$*;*
- $\forall B \in \mathcal{F}$ *platí* $\int_B E[X|\mathcal{F}] \,\mathrm{d}P = \int_B X \,\mathrm{d}P$.

Poznámka 1.1 V celej práci uvažujeme len reálne náhodné veličiny, preto pod pojmom náhodná veličina budeme rozumieť reálnu náhodnú veličinu.

1.2 Náhodná prechádzka

V nasledujúcej časti definujeme pojem náhodná prechádzka a ukážeme niekoľko ilustrácií jej rôznych typov.

Definícia 1.3 *Nech* $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ *je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených diskrétnych náhodných veličín. Pre* $\forall n \in \mathbb{N}$ *definujeme*

$$S_n = S_0 + \sum_{t=1}^{\infty} X_t.$$

Potom postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nazveme náhodnou prechádzkou a bod* S_0 *začiatočným bodom náhodnej prechádzky.*

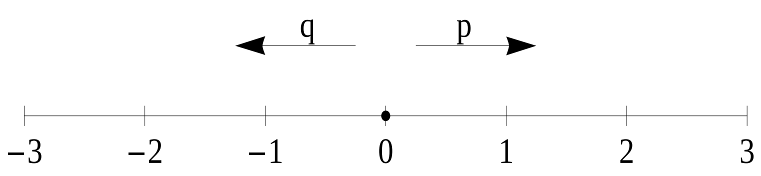
V tomto texte sa budeme zaoberať náhodnými prechádzkami v $\mathbb{Z}^m$. Preto budeme uvažovať X_t, $t \geq 1$ a S_0 s hodnotami v $\mathbb{Z}^m$.

Definícia 1.4 *Diskrétne náhodné veličiny* $X_1, X_2, ...$ *nazveme krokmi náhodnej prechádzky v prípade, že* $\forall i \in \mathbb{N}$ *a pre* $j = 1, ..., 2m$ *je*

$$P(X_i = e_j) = \begin{cases} p_j & e_j \in \mathbb{Z}^m, \\ 0 & inak. \end{cases}$$

Pričom $0 \leq p_j \leq 1$ *a* $p_1 + ... + p_{2m} = 1$.
Hodnotu euklidovskej normy $\|e_j\|$ *nazvime dĺžkou kroku náhodnej prechádzky.*

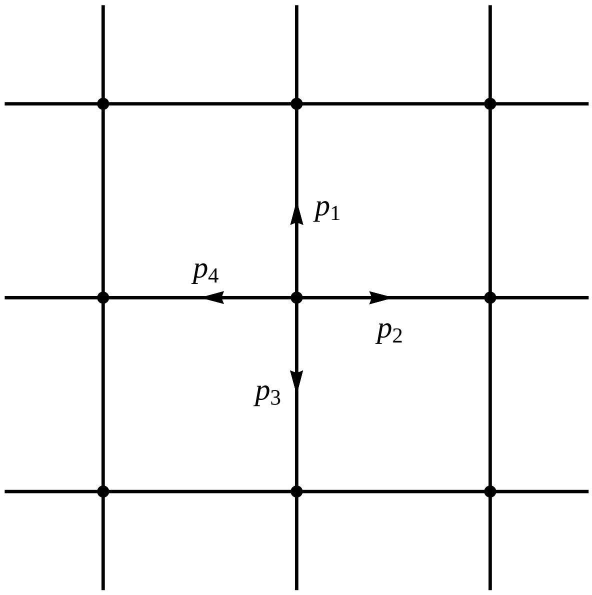
Definícia 1.5 *Náhodná prechádzka, ktorej za sebou idúce kroky sú nezávislé a majú dĺžku jedna, sa nazýva jednoduchá náhodná prechádzka. Kroky jednoduchej náhodnej prechádzky v* $\mathbb{Z}^m$ *sa môžu realizovať do 2m možných smerov.*



Obr. 1.1: Jednoduchá náhodná prechádzka v $\mathbb{Z}$

V prípade jednoduchej náhodnej prechádzky pre $m = 1$ máme $X_t = \pm 1$, pričom $P(X_t = 1) = p$ a $P(X_t = -1) = 1 - p = q$, pre $t \geq 1$. V tomto prípade si pre zjednodušenie môžeme predstavovať časticu, ktorá sa pohybuje po celých číslach reálnej osi a začína v bode nula (položme $S_0 = 0$). Ilustráciu tejto situácie vidíme na Obr. 1.1. Častica sa pohybuje doprava s pravdepodobnosťou p a doľava s pravdepodobnosťou q. Suma S_n reprezentuje pozíciu častice na konci n-tého kroku.

Ak je $m = 2$, môžeme si pre lepšie pochopenie predstaviť mesto, ktorého ulice vytvárajú štvorcové bloky. Človek sa na začiatok postaví na miesto, kde sa pretínajú dve ulice a odtiaľ môže ísť do jedného zo štyroch možných smerov podľa vopred daných pravdepodobností p_1 až p_4.



Obr. 1.2: Jednoduchá náhodná prechádzka v $\mathbb{Z}^2$

Pre $m = 3$ sa vyberá zo šiestich smerov a tak ďalej analogicky.

Poznámka 1.2 V ďalšom texte budeme väčšinou hovoriť o jednoduchej náhodnej prechádzke v jednej dimenzii ($m = 1$), preto ak nebude explicitne uvedené inak, pod pojmom náhodná prechádzka rozumieme jednoduchú a jednodimenzionálnu náhodnú prechádzku, ktorá začína v nule ($S_0 = 0$).

Predtým ako sa budeme ďalej zaoberať jednotlivými druhmi náhodnej prechádzky podrobnejšie, dokážeme, že náhodná prechádzka spĺňa Markovovu vlastnosť stochastických procesov. Markovovu vlastnosť uvádzame vo forme pre diskrétne náhodné veličiny.

Lemma 1.1 *Nech postupnosť* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je jednoduchá náhodná prechádzka. Potom pre* $\forall n \in \mathbb{N}$ *platí nasledujúca rovnosť:*

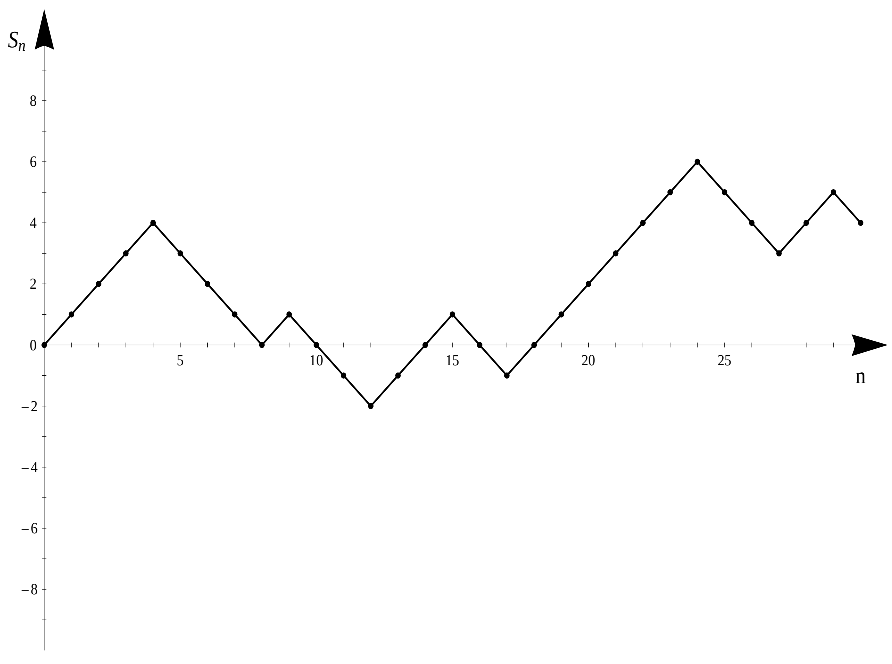
$$P(S_{m+n} = j | S_0 = s_0, S_1 = s_1, ..., S_m = s_m) = P(S_{m+n} = j | S_m = s_m).$$

Dôkaz. Ak už vieme hodnotu S_m, potom rozdelenie S_{m+n} závisí len na hodnotách $X_{m+1}, ..., X_{m+n}$. Z toho vyplýva, že hodnoty $S_0, ..., S_{m-1}$ už nie sú potrebné, odkiaľ plynie tvrdenie. □

1.3 Symetrická náhodná prechádzka

Definícia 1.6 *Jednoduchá náhodná prechádzka sa nazýva symetrická v prípade, že* $p = q = \frac{1}{2}$.

Náhodná prechádzka sa často interpretuje pomocou grafu lomenej čiary, ktorá spája body (n, S_n) z náhodnej prechádzky $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nazvime tento graf cestou. Príklad takejto reprezentácie náhodnej prechádzky nájdeme na Obr. 1.3. Os x predstavuje časový rozmer prechádzky a os y hodnoty S_n, teda pozíciu častice v čase n.



Obr. 1.3: Jednoduchá náhodná prechádzka na grafe

Ďalej budeme skúmať prípad náhodnej prechádzky, ktorá začína v nule ($S_0 = 0$). Budeme smerovať k tomu, aby sme dokázali, že symetrická náhodná prechádzka, ktorá začína v nule sa s pravdepodobnosťou jedna do nuly aj vráti. V tejto časti uvádzame kombinatorický prístup k študovaniu vlastností náhodnej prechádzky. Ukážeme, akým spôsobom je možné využiť princíp reflexie a počítania ciest. Získaný výsledok neskôr použijeme aj v podkapitole 1.4 na odvodenie všeobecnejších záverov týkajúcich sa návratu náhodnej prechádzky do nuly.

V celej tejto časti budeme n a m chápať ako čísla z $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Index n chápeme ako dĺžku cesty. Existuje 2^n ciest dĺžky n a v prípade symetrickej náhodnej prechádzky má každá z nich rovnakú pravdepodobnosť (a teda 2^{-n}). Majme bod (n, x). Na to, aby mohol byť súčasťou cesty musí spĺňať nasledovné:

$$n = a + b \quad \text{a} \quad x = a - b, \tag{1.1}$$

kde a je počet jednotiek, ktoré nadobudnú náhodné veličiny X_n, $n \in \mathbb{N}$ v náhodnej prechádzke a b je počet mínus jednotiek. Nech body (m, y) a $(m + n, x)$ ležia na ceste. Potom počet ciest, ktoré vedú z bodu (m, y) do bodu $(m + n, x)$ označme $N_n(y, x)$ pre $\forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x, y \in \mathbb{Z}$. Najprv si vyčíslime množstvo ciest, ktoré vedú z bodu (m, y) do bodu $(m + n, x)$. Nech v n krokoch, ktoré z (m, y) uskutoční náhodná prechádzka do bodu $(m+n, x)$ je a jednotiek a b mínus jednotiek. Teda stačí keď vyberieme z n možných, miesta pre a jednotiek, z čoho dostávame počet ciest vyjadrený pomocou kombinačného čísla

$$N_n(y, x) = \binom{n}{a}.$$

Na to, aby medzi bodom (m, y) a bodom $(m + n, x)$ existovala cesta, musí platiť analógia vzťahov (1.1)

$$n = a + b \quad \text{a} \quad x - y = a - b.$$

Z toho pre počet jednotiek dostávame vzorec

$$a = \frac{n + x - y}{2}. \tag{1.2}$$

Z predchádzajúceho jednoducho môžeme vyjadriť pravdepodobnosť, že náhodná prechádzka začínajúca v nule je v čase n rovná x, teda $S_n = x$ ako

$$p_{n,x} = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} 2^{-n}.$$

Vzhľadom na to, že S_n je suma 1 a -1, musí byť n párne číslo, aby mohol po n krokoch nastať stav $S_n = 0$. Teda podľa predchádzajúceho je pravdepodobnosť návratu prechádzky do počiatku v čase 2n

$$p_{2n,0} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}.$$

Náhodná prechádzka sa do nuly môže vrátiť aj niekoľkokrát, ako môžeme vidieť na Obr. 1.3. Nás bude špeciálne zaujímať pravdepodobnosť prvého návratu do bodu nula v čase $2n$, ktorú označíme f_{2n}, $\forall n \in \mathbb{N}$ a dodefinujeme $f_0 := 0$. Táto pravdepodobnosť sa dá veľmi jednoducho vyčísliť počítaním ciest. Na začiatok musíme rozčleniť cesty na tie, ktoré prechádzajú nulou a tie čo nie. To, že cesta prejde nulou znamená, že niekde počas dĺžky cesty náhodná prechádzka nadobudne hodnotu nula, pričom nerátame začiatočný ani koncový bod cesty. To, že cesta neprejde nulou znamená, že náhodná prechádzka hodnotu nula nenadobudne, pričom opäť nerátame začiatočný ani koncový bod cesty. Označme preto cestu, ktorá vedie z bodu (m, y) do bodu $(m+n, x)$ a neprejde pritom nulou ako $N_n^{\neq 0}(y, x)$ a cestu, ktorá vedie z bodu (m, y) do bodu $(m+n, x)$ a prechádza nulou ako $N_n^{=0}(y, x)$ a to $\forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, kde $x, y \in \mathbb{Z}$. Ľahko si uvedomíme, že na to, aby sme mohli odvodiť pravdepodobnosť prvého návratu do počiatku v čase $2n$, potrebujeme vedieť počet ciest, ktoré neprechádzajú nulou, začínajú v nule aj v nej končia a zároveň majú dĺžku $2n$.
Počítajme :

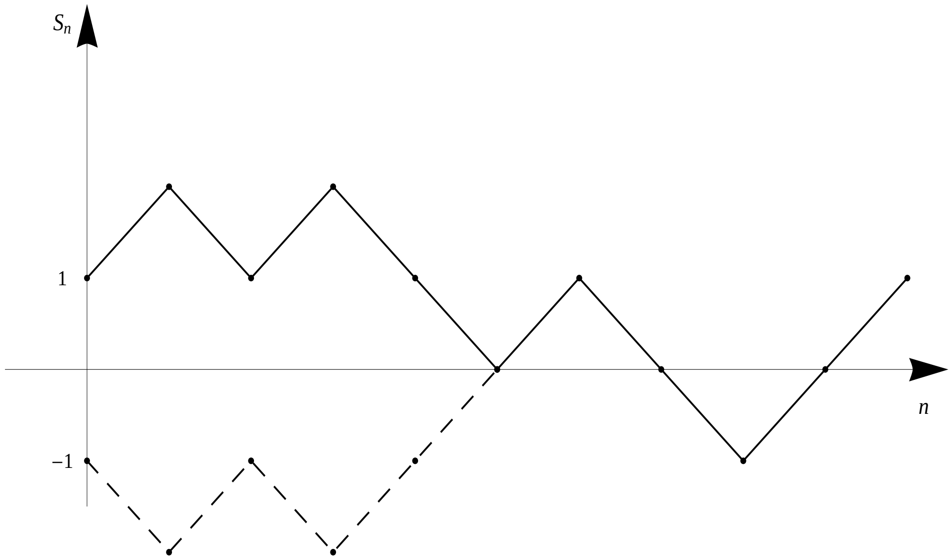
$$\begin{aligned} N_{2n}^{\neq 0}(0,0) &= N_{2n-1}^{\neq 0}(1,0) + N_{2n-1}^{\neq 0}(-1,0) \\ &= 2N_{2n-1}^{\neq 0}(1,0) \\ &= 2N_{2n-2}^{\neq 0}(1,1). \end{aligned}$$

Posledná rovnosť plynie z nasledujúcej úvahy. $N_{2n-1}^{\neq 0}(1,0)$ označuje počet ciest z bodu 1 do bodu 0, ktoré nemôžu prejsť cez nulu skôr ako v $2n-1$ kroku, v ktorom skončia v nule. To znamená, že predposledný krok takejto cesty musí viesť z bodu 1 (nemôže viesť z bodu -1, keďže na to, aby sa do bodu -1 cesta dostala, by musela prejsť cez nulu skôr ako v $2n-1$ kroku), z čoho plynie posledná rovnosť. Na to, aby sme vyčíslili $N_{2n-2}^{\neq 0}(1,1)$, použijeme princíp reflexie. Každá cesta z 1 do 1, ktorá prechádza cez nulu sa dá transformovať na cestu z -1 do 1 pomocou princípu zrkadlenia tej časti cesty, ktorá sa nachádza pred prvým prechodom cez nulu. Keďže ide o bijekciu, takýchto ciest z 1 do 1 je rovnaký počet ako z -1 do 1. Ilustráciu princípu reflexie môžeme vidieť na Obr. 1.4. Uvedomme si, že cesta z -1 do 1 musí vždy prejsť cez nulu.

$$N_{2n-2}^{=0}(1,1) = N_{2n-2}^{=0}(-1,1) = N_{2n-2}(-1,1).$$

Z toho vyplýva, že

$$\begin{aligned} N_{2n-2}^{\neq 0}(1,1) &= N_{2n-2}(1,1) - N_{2n-2}^{=0}(1,1) \\ &= N_{2n-2}(1,1) - N_{2n-2}(-1,1). \end{aligned}$$



Obr. 1.4: Princíp reflexie

Dosadíme a s využitím (1.2) dostávame

$$\begin{aligned} N_{2n}^{\neq 0}(0,0) &= 2[N_{2n-2}(1,1) - N_{2n-2}(-1,1)] \\ &= 2\left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right] = 2\left[\binom{2n-2}{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right] \\ &= \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Z toho plynie, že

$$f_{2n} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}2^{-2n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Teraz už máme pripravené všetko na to, aby sme mohli formulovať a dokázať avizovanú vetu.

Veta 1.1 *Nech $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je jednoduchá symetrická náhodná prechádzka, pre ktorú platí $S_0 = 0$. Potom pravdepodobnosť, že náhodná prechádzka sa do nuly vráti je jedna.*

Dôkaz. V dôkaze budeme používať predchádzajúce výsledky aj značenie. Označme pravdepodobnosť, že sa prvý návrat náhodnej prechádzky do nuly uskutoční v čase menšom alebo rovnom $2n$ ako u_{2n} pre $n \in \mathbb{N}$. Pravdepodobnosť, že náhodná prechádzka sa vráti do nuly označme ako u. Potom platí

$$u = \lim_{n\to\infty} u_{2n}.$$

Táto limita u existuje a je najviac jedna, kedže u_{2n} pre rastúce n rastie a zároveň je $u_{2n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ďalej platí

$$u_{2n} = \sum_{i=1}^{n} f_{2i}.$$

Upravujme výraz $p_{2n-2,0} - p_{2n,0}$.

$$\begin{aligned} p_{2n-2,0} - p_{2n,0} &= \binom{2n-2}{n-1} 2^{-(2n-2)} - \binom{2n}{n} 2^{-2n} \\ &= 2^{-2n}\left[4\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n}{n}\right] = 2^{-2n}\left[\binom{2n}{n}\frac{2n}{2n-1} - \binom{2n}{n}\right] \\ &= 2^{-2n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

Vidíme, že platí $f_{2n} = p_{2n-2,0} - p_{2n,0}$. Po dosadení do sumy $\sum_{i=1}^{n} f_{2i}$ dostávame

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{n} f_{2i} &= p_{0,0} - p_{2n,0} \\ &= 1 - \binom{2n}{n} 2^{-2n}. \end{aligned}$$

A limitným prechodom $n \to \infty$ dostávame

$$u = \lim_{n\to\infty} u_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \binom{2n}{n} 2^{-2n} = 1.$$

□

1.4 Stavy náhodnej prechádzky

V predchádzajúcej podkapitole sme sa venovali návratu symetrickej náhodnej prechádzky do nuly. V tejto časti budeme uvažovať podobný problém, no v trochu všeobecnejšej forme. Bude nás zaujímať s akou pravdepodobnosťou častica náhodnej prechádzky, ktorá vyjde z bodu i sa do bodu i nekonečne krát vráti, $i \in \mathbb{Z}^m$. Budeme uvažovať jednoduchú náhodnú prechádzku v $\mathbb{Z}^m$ nielen v jednej dimenzii, pretože chceme ukázať dva rôzne spôsoby, ktoré povedú k tomu istému výsledku, a preto aby sme sa neopakovali, druhý spôsob ukážeme na jednoduchej náhodnej prechádzke v $\mathbb{Z}^2$.

Definícia 1.7 *Nech* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je jednoduchá náhodná prechádzka v* $\mathbb{Z}^m$*, kde*

$$S_n = S_0 + \sum_{t=1}^{\infty} X_t.$$

Nech $i \in \mathbb{Z}^m$*,* $i \in S$ *práve vtedy, keď existuje* $t \geq 1$ *tak, že* $P(X_t = i) > 0$*. Potom množina* S*, zložená z prvkov* i*, sa nazýva množinou stavov náhodnej prechádzky. Prvky množiny* S *nazývame stavy náhodnej prechádzky* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$*.*

Z predchádzajúcej definície vyplýva, že pre symetrickú náhodnú prechádzku, ktorou sme sa zaoberali už v podkapitole 1.3, uvažujeme množinu stavov v tvare $S = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.

Definícia 1.8 *Nech* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je náhodná prechádzka. Hovoríme, že stav* i *je trvalým stavom náhodnej prechádzky ak*

$$P(S_n = i, \ \textit{pre nekonečne mnoho} \ n \in \mathbb{N}) = 1.$$

Stav i *náhodnej prechádzky je stavom prechodným ak*

$$P(S_n = i, \ \textit{pre nekonečne mnoho} \ n \in \mathbb{N}) < 1.$$

Podľa definície sa stav i nazýva trvalým stavom, ak náhodná prechádzka, ktorá vychádza z i, sa s pravdepodobnosťou jedna nekonečne krát do stavu i aj vráti. Podobný, no oveľa konkrétnejší výsledok sme skúmali na začiatku tejto kapitoly, keď sme sa zaoberali (prvým) návratom do nuly, pričom náhodná prechádzka z nuly vychádzala. Zaveďme označenie $T_0 = 0$ a ako čas prvého návratu do nuly označme

$$T_1 = \inf\{m \geq 1 : X_m = 0\}.$$

Za predpokladu, že čas prvého návratu je konečný, označíme T_2 čas druhého návratu do nuly, kde $T_2 = \inf\{m > T_1 : S_m = 0\}$. Podobným postupom dostávame pre $n > 1$ vzorec pre čas n-tého návratu do nuly ako

$$T_n = \inf\{m > T_{n-1} : S_m = 0\}.$$

Z Vety 1.1 dostávame, že sa symetrická náhodná prechádzka s pravdepodobnosťou jedna vráti do nuly, s ohľadom na práve definované značenie je teda

$$P(T_1 < \infty) = 1.$$

Na základe tohoto výsledku odvodíme, či je nula prechodným alebo trvalým stavom náhodnej prechádzky pomocou nasledujúceho tvrdenia.

Lemma 1.2 *Nech* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je symetrická náhodná prechádzka začínajúca v nule, potom nasledujúce tvrdenia su ekvivalentné:*
(i) $P(T_1 < \infty) = 1$;
(ii) $P(S_n = 0,\ \textit{pre nekonečne mnoho}\ n \in \mathbb{N}) = 1$;
(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty$.

Dôkaz. Uvedomme si, že náhodná prechádzka začínajúca v nule v momente, keď sa do nuly opäť vráti, predstavuje ako keby novú náhodnú prechádzku začínajúcu v nule. Tento proces istého reštartovania je možné vyjadriť ako

$$P(T_n < \infty) = P(T_1 < \infty)^n. \tag{1.3}$$

Formálny dôkaz tohoto tvrdenia je možné nájsť v [4] sekcia 4.1.
Dokazujme prvú implikáciu $(i) \Rightarrow (ii)$. Z (1.3) vyplýva, že ak $P(T_1 < \infty) = 1$, potom $P(T_n < \infty) = 1$, pre $\forall n \in \mathbb{N}$, čo znamená, že symetrická náhodná prechádzka navštívi stav nula nekonečne mnohokrát s pravdepodobnosťou jedna. Toto tvrdenie je ekvivalentné s tvrdením (ii) a tým je prvá implikácia dokázaná.
Ukážme, že platí druhá implikácia $(ii) \Rightarrow (iii)$. Predpokladajme pre spor, že platí (ii) ale neplatí (iii). Z toho, že $\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) < \infty$ plynie využitím Cantelliho vety, že $P(S_n = 0,\ \textit{pre nekonečne mnoho}\ n \in \mathbb{N}) = 0$, čo je spor s predpokladom. Odkiaľ plynie implikácia. Znenie i dôkaz Cantelliho vety je možné nájsť v [3], kapitola štvrtá, Veta 4.1.
Dokazujme posledné tvrdenie $(iii) \Rightarrow (i)$. Označme počet návratov náhodnej prechádzky do nuly, vrátane počiatočného stavu ako

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{(S_n=0)} = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{(T_n<\infty)}. \tag{1.4}$$

Pomocou (1.3) a (1.4) vyjadríme strednú hodnotu veličiny N ako

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_1 < \infty)^n. \end{aligned}$$

Poslednú implikáciu vyvodíme dôkazom nepriamo. Ak neplatí tvrdenie (i) a teda $|P(T_1 < \infty)| < 1$, potom z posledného vyjadrenia $E[N]$ dostávame konečné číslo (súčet geometrickej rady s kvocientom $|P(T_1 < \infty)| < 1$). A teda $\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) \neq \infty$, z čoho neplatí (iii). Overili sme platnosť poslednej implikácie $(iii) \Rightarrow (i)$. $\square$

Lemma 1.2 je možné preformulovať aj pre všeobecný stav i náhodnej prechádzky, v tomto texte ho ale uvádzame len v konkrétnej forme pre nulu. Z dôvodu toho, že tvrdenie (i) už máme z Vety 1.1 a na základe nasledujúcej úvahy ukážeme, že je postačujúce vedieť, že stav nula je trvalý stav na to, aby sme dokázali rozhodnúť o trvalosti ostatných stavov náhodnej prechádzky.

Nazvime náhodnú prechádzku trvalou ak všetky jej stavy sú trvalé. Ukázali sme, že pre symetrickú náhodnú prechádzku je stav nula trvalým stavom (plynie to z implikácie $(i) \Rightarrow (ii)$). Nech stavy $i, j \in S$. Povedzme, že stav j náhodnej prechádzky je dosiahnuteľný zo stavu i, ak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$P(S_{m+n} = j | S_m = i) > 0.$$

V prípade, že stav j je dosiahnuteľný zo stavu i a stav i je dosiahnuteľný z j a zároveň platí, že stav i je trvalý, potom aj stav j je trvalý. Predchádzajúce tvrdenie je možné nájsť v [10] Veta 2.13. Teda nielen stav nula je trvalým, pre symetrickú náhodnú prechádzku sú trvalé všetky stavy. Z toho vyplýva, že symetrická náhodná prechádzka je trvalý náhodný proces, a teda pre každý jej stav i platí, že ho náhodná prechádzka navštívi nekonečne mnohokrát.

K tomu, že stav nula je trvalý, čo sme ukázali spojením Vety 1.1 a Lemma 1.2 je možné sa dostať vzhľadom na Lemma 1.2 aj iným spôsobom, a to skúmaním sumy $\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0)$. Ukážeme tento postup pre jednoduchú náhodnú prechádzku v $\mathbb{Z}^2$. Majme teda náhodnú prechádzku v $\mathbb{Z}^2$ vo forme v akej ju vidíme na Obr. 1.2. Častica náhodnej prechádzky, ktorá začína v nule sa teda môže vydať štyrmi smermi. Predpokladajme, že pravdepobnosť všetkých štyroch smerov je rovnaká a to jedna štvrtina. Opísali sme vlastne analógiu symetrickej náhodnej prechádzky v $\mathbb{Z}$ z Definície 1.6. Cesty, ktoré vychádzajú z nuly sa do nuly môžu vrátiť len po párnom počte krokov. Nech teda takáto cesta má $2n$ krokov, $n \in \mathbb{N}$. Pre $0 \leq m \leq n$ tieto cesty môžu pozostávať z m krokov smerom hore, m krokov dole, $n - m$ krokov doľava a $n - m$ krokov doprava. Potom s ohľadom na značenie v Lemma 1.2 je pravdepodobnosť, že sa takto definovaná náhodná prechádzka vychádzajúca z nuly do nuly vráti po $2n$ krokoch

$$\begin{aligned}
P(S_{2n} = 0) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{(2n)!}{m!m!(n-m)!(n-m)!} \frac{1}{4^{2n}} \\
&= \frac{(2n)!}{4^{2n}} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!m!(n-m)!(n-m)!} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{n!}{m!(n-m)!} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \binom{n}{m} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \binom{n}{n-m} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

Posledná rovnosť plynie z binomickej identity

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n},$$

ktorej dôkaz je možné nájsť v [7], časť 5.1, str. 170. Na odhadnutie faktoriálu v predchádzajúcom výsledku použijeme Stirlingov vzorec

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

kde symbolu $\sim$ rozumieme tak, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Potom pre $n \to \infty$ platí

$$\frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}\binom{2n}{n} \sim \left(\frac{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n}\right)^2 \frac{1}{4^{2n}} = \frac{1}{\pi n}.$$

Z toho dostávame

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty.$$

Dokázali sme teda, že stav nula je opäť trvalým stavom náhodnej prechádzky. Z podobnej úvahy ako v predchádzajúcom odstavci plynie, že jednoduchá náhodná prechádzka v $\mathbb{Z}^2$ je trvalá.

Poznámka 1.3 V tretej a vyššej dimenzii je možné dokázať, že náhodná prechádzka už nie je trvalý náhodný proces.

2. Ruinovanie hráča

V tejto sekcii sa budeme opäť venovať jednoduchej náhodnej prechádzke, no tentokrát problém zovšeobecníme a vynecháme podmienku symetrie. Nech $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je jednoduchá náhodná prechádzka, kde

$$S_n = S_0 + \sum_{t=1}^{\infty} X_t.$$

Nech pre $t \geq 1$ je

$$P(X_t = 1) = p \text{ a } P(X_t = -1) = q.$$

Zároveň platí $p + q = 1$. Vzhľadom na to, že tieto podmienky spĺňa aj symetrická verzia jednoduchej náhodnej prechádzky, uvedieme výsledky v tejto podkapitole najskôr vo všeobecnej forme a potom i pre konkrétny prípad $p = q = \frac{1}{2}$.

Takto definovanú náhodnú prechádzku si môžeme predstaviť ako hru hráča v kasíne proti bankérovi. Hra pozostáva z postupnosti za sebou nasledujúcich nezávislých partií. V rámci jednej partie vyhráva hráč s pravdepodobnosťou p a prehrá s pravdepodobnosťou q (výhra bankéra). Ak partiu hráč vyhrá, dostane od kasína jednu korunu a naopak ak partiu prehrá, vyplatí bankérovi jednu korunu on. Predpokladajme, že partia nemôže skončiť remízou. Pod pojmom partia si môžeme predstavovať napríklad hod nevyváženou mincou, pričom hlava padne s pravdepodobnosťou p (vyhráva hráč) a orol padne s pravdepodobnosťou q (výhra pripadne kasínu). Hráč začína hru disponujúc obnosom k korún a hrá dovtedy, kým jeho kapitál nedosiahne buď hranicu A alebo 0, v tom prípade hovoríme, že je zruinovaný. Predpokladajme, že $k \in (0, A)$. Vzhľadom na predchádzajúcu reprezentáciu náhodnej prechádzky, si môžeme túto hru predstavovať ako časticu na reálnej osi, ktorá vykonáva náhodnú prechádzku, pričom začína v bode k. V prípade, že častica dosiahne hranicu 0 alebo A je pohltená a náhodná prechádzka skončí, hovoríme o absorpčných barierach.

Bude nás zaujímať práve pravdepodobnosť, že dôjde k zruinovaniu hráča. Označme q_k ako pravdepodobnosť, že hráčov kapitál dosiahne počas hry skôr nulu ako hodnotu A, pričom jeho počiatočný kapitál je k. Ako p_k označme situáciu opačnú a teda, že hráčov kapitál nadobudne hodnotu A skôr ako je hráč zruinovaný.
Po prvej partii sa hráčov kapitál buď o jednu korunu zväčší alebo zmenší. Položme

$$q_0 = 1, \quad q_A = 0.$$

Pomocou vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame pre $k = 1, 2, ..., A - 1$:

$$q_k = q_{k+1}p + q_{k-1}q. \tag{2.1}$$

Kedže $p+q=1$ môžeme (2.1) prepísať na tvar

$$p(q_{k+1}-q_k)=q(q_k-q_{k-1}),$$

z čoho dostávame

$$q_{k+1}-q_k=\left(\frac{q}{p}\right)^k(q_1-q_0). \tag{2.2}$$

Vzhľadom na to ako sme definovali q_A a q_0 dostávame

$$\begin{aligned}-1&=q_A-q_0\\&=\sum_{i=0}^{A-1}(q_{i+1}-q_i).\end{aligned}$$

Z toho

$$-1=(q_1-q_0)\sum_{i=0}^{A-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i. \tag{2.3}$$

Nech $p\neq q$ potom dostávame

$$q_1-q_0=-\frac{\left(\frac{q}{p}\right)-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^A-1}.$$

Pre akékoľvek dané k také, že $1\leq k\leq A$ platí

$$\begin{aligned}q_k-q_0&=\sum_{i=0}^{k-1}(q_{i+1}-q_i)\\&=-(q_1-q_0)\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k-1}{\frac{q}{p}-1}\\&=-\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^A-1}.\end{aligned}$$

Z čoho výsledne pre $p\neq q$ platí

$$q_k=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^A-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^A-1},\qquad 0\leq k\leq A.$$

Nech $p = q = \frac{1}{2}$ potom z výsledku (2.3) dostaneme rovnosť

$$-1 = (q_1 - q_0)A. \tag{2.4}$$

Úpravou (2.2) dostaneme, že

$$q_{k+1} - q_k = q_1 - q_0.$$

Potom pre akékoľvek dané k také, že $1 \leq k \leq A$

$$\begin{aligned} q_k - q_0 &= \sum_{i=0}^{k-1} (q_{i+1} - q_i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (q_1 - q_0) \\ &= k(q_1 - q_0). \end{aligned}$$

Dosadením (2.4) do predchádzajúceho dostávame pre $0 \leq k \leq A$ výsledok

$$q_k = \frac{A-k}{A}. \tag{2.5}$$

Rovnako ako pravdepodobnosť q_k, môžeme vyčísliť i pravdepodobnosť p_k, že hráč dosiahne hranicu A skôr ako je zruinovaný, pre $0 \leq k \leq A$ s nasledujúcim výsledkom

$$p_k = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^A - 1} & p \neq q, \\ \frac{k}{A} & p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Podobným spôsobom ako pravdepodobnosť ruinovania, či výhry hráča, môžeme vypočítať i strednú dobu trvania hry. Označme D_k strednú dobu trvania hry za predpokladu, že hráč začína s počiatočným kapitálom k korún. Nech $D_0 = 0$ a $D_A = 0$, pre $0 < k < A$ platí

$$D_k = D_{k+1}p + D_{k-1}q + 1.$$

Postup riešenia je možné nájsť v [5] sekcia 3. kapitola XIV. Potom dostávame pre $0 \leq k \leq A$ výsledok

$$D_k = \begin{cases} \frac{k}{q-p} - \frac{A}{q-p} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^A} & p \neq q, \\ k(A-k) & p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.6}$$

k	A	q_k	p_k	D_k
10	11	0,09	0,91	10
100	110	0,09	0,91	1 000
1000	1100	0,09	0,91	100 000
50	1000	0,95	0,05	47 500
500	1000	0,50	0,50	250 000
5000	10000	0,50	0,50	25 000 000
8000	10000	0,20	0,80	16 000 000

Tabuľka 2.1: Ruinovanie hráča pre $p = q$

Na konci tejto podkapitoly uvádzame niekoľko konkrétnych hodnôt na ilustráciu ruinovania hráča v hre proti kasínu. V Tabuľke 2.1 môžeme vidieť pravdepodobnosť ruinovania hráča q_k, pravdepodobnosť dosiahnutia hranice A skôr ako je hráč zruinovaný p_k a strednú dobu trvania hry D_k pre symetrickú situáciu $p = q = \frac{1}{2}$. Je veľmi zaujímavé si všimnúť hlavne hodnoty trvania hry, ktoré sú oveľa vyššie, ako by sa dalo očakávať. Napríklad v prípade, že hráč začína s 500 korunami a je ochotný hrať až po hranicu 1000 korún, stredná doba trvania tejto hry je 250 000 partií. Podobne ak hráč začína s 50 korunami a hranica A je stanovená na 1000 korún, potom s veľkou pravdepodobnosťou dôjde k zruinovaniu hráča skôr ako túto hranicu dosiahne, no napriek tomu priemerný počet partií, kým sa hra nakoniec rozhodne je 47 500. Ďalšie hodnoty je možné nájsť v Tabuľke 2.1. Pre nesymetrickú hru $p \neq q$ je možné vidieť konkrétne

p	q	k	A	q_k	p_k	D_k
0,35	0,65	10	11	0,462	0,538	13,6
0,35	0,65	100	110	0,998	0,002	332,6
0,4	0,6	10	11	0,337	0,663	13,5
0,4	0,6	100	110	0,983	0,017	490,5
0,45	0,55	100	110	0,866	0,134	852,1
0,45	0,55	1000	1002	0,331	0,669	3292,4
0,47	0,53	10	11	0,154	0,846	11,6
0,47	0,53	100	110	0,699	0,301	1115,3
0,49	0,51	10	11	0,110	0,890	10,6
0,49	0,51	100	111	0,360	0,640	1449,4

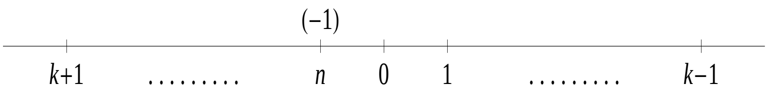
Tabuľka 2.2: Ruinovanie hráča pre $p \neq q$

výsledky v Tabuľke 2.2. Hodnoty p a q sme sa snažili voliť blízke skutočným hodnotám pravdepodobností hier v kasíne. V predposledných dvoch riadkoch v Tabuľke 2.2 sa nachádzajú hodnoty pravdepodobností pre americkú ruletu, v posledných dvoch sú pravdepodobnosti výhry v rulete európskeho typu. Základný model rulety má políčka 1 až 36, z ktorých je polovica čiernych a druhá polovica červených. Európska ruleta naviac obsahuje políčko 0, ktoré nie je ani čierne ani červené. Americká verzia rulety obsahuje dve takéto políčka, označené ako 0 a 00. V prípade, že sa gulička zastaví na políčku 0 alebo 00 stávky prepadajú kasínu a nikto nevyhráva.

Príklad 2.1
Majme symetrickú náhodnú prechádzku, ktorá sa realizuje po obvode kruhu na bodoch $0, 1, 2, ..., n$. Náhodná prechádzka začína v nule.

Aká je pravdepodobnosť, že bod k kde $k = 1, 2, ..., n$ bude navštívený náhodnou prechádzkou ako posledný zo všetkých bodov?

Uvedomme si, že takto definovaná náhodná prechádzka dosiahne ktorýkoľvek z bodov $k-1$, $k+1$ v konečnom čase s pravdepodobnosťou jedna. Je totiž možné si nami definovanú situáciu na kruhu predstaviť na reálnej osi (Obr. 2.1), čím sa problém transformuje na obyčajnú symetrickú náhodnú prechádzku, pre ktorú to potom vyplýva z podkapitoly 2.1.

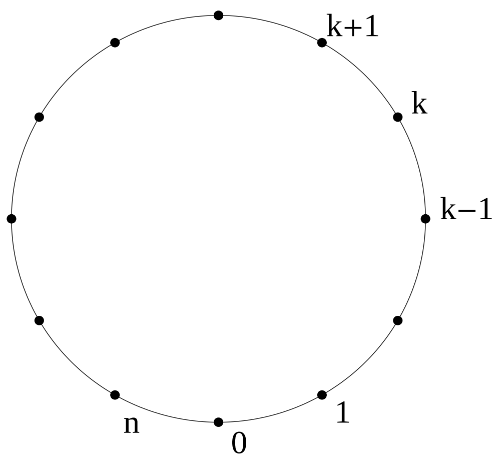


Obr. 2.1: Ilustrácia Príkladu 2.1

Ďalej chceme, aby náhodná prechádzka navštívila bod k ako posledný zo všetkých bodov. Označme pravdepodobnosť, že sa tak stane P_k pre $k = 1, 2, ..., n$. Bezprostredne predtým ako prechádzka prejde do bodu k, musí sa nachádzať buď v bode $k-1$ alebo v bode $k+1$. Pre lepšie pochopenie situácie viď Obr. 2.2. Vzhľadom na to, že situácia je symetrická, predpokladajme, že sa náhodná prechádzka nachádza v bode $k-1$ a predpokladajme, že sa v bode $k-1$ nachádza prvýkrát. Na to, aby bod k bol posledným navštíveným, musí prechádzka prejsť z bodu $k-1$ do bodu $k+1$ po smere hodinových ručičiek. Pravdepodobnosť takejto cesty sa zhoduje s pravdepodobnosťou ruinovania hráča v kasíne, ktorý má $n-1$ korún a je rozhodnutý hrať až po hranicu n korún. Teda $A = n$.
Zo vzorca (2.5) plynie výsledok :

$$P_k = \frac{1}{n}, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Alternatívne riešenie tohoto príkladu je možné nájsť v [1], kapitola II. v časti 2.9. Ide



Obr. 2.2: Náhodná prechádzka na kruhu

o využitie vety o úplnej pravdepodobnosti, najskôr v jednoduchšom prípade štyroch bodov na kruhu a následné rozšírenie pre všeobecné n.

2.1 Hráč s neobmedzeným kapitálom

Doteraz sme sa zaoberali prípadom existencie dvoch absorpčných barier 0 a hranice A. V skutočnej hre sa veľmi často stáva, že počiatočný kapitál hráča je oveľa menší ako prostriedky kasína. Má preto zmysel uvažovať hru hráča proti nekonečne bohatému protivníkovi. Pošlime teda $A \to \infty$ a dostaneme

$$q_k = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^k & p > q, \\ 1 & p \leq q. \end{cases}$$

V reči náhodnej prechádzky môžeme tento výsledok interpetovať nasledovne: pravdepodobnosť, že náhodná prechádzka začínajúca v nule dosiahne bod $k > 0$ je $(\frac{q}{p})^k$ pre $p > q$ a 1 pre $p \leq q$. Z toho využitím symetrie dostávame, že symetrická náhodná prechádzka začínajúca v nule dosiahne s pravdepodobnosťou jedna akýkoľvek bod $k \in \mathbb{Z}$. Tento výsledok vpodstate plynie priamo z podkapitoly 1.4, z ktorej vyplýva, že symetrická náhodná prechádzka nielenže dosiahne akýkoľvek bod $k \in \mathbb{Z}$ ale ho dokonca navštívi nekonečne mnohokrát. Uvádzame však daný výsledok aj na tomto mieste, pretože je zaujímavé uvedomiť si iný spôsob ako je možné dospieť k tomuto záveru.

Podobne ako q_k môžeme prechodom $A \to \infty$ vyjadriť zo vzorca (2.6) očakávanú dĺžku hry proti hráčovi s neobmedzeným kapitálom ako

$$D_k = \begin{cases} \frac{k}{q-p} & p < q, \\ \infty & p \geq q. \end{cases}$$

Poznámka 2.1 Uvádzaný príklad hráča v kasíne sa dá taktiež preformulovať ako hra dvoch hráčov B_1 a B_2. Pričom hráč B_1 začína hru s kapitálom k korún a pravdepodobnosť jeho výhry je p. Hráč B_2 začína hru s $A - k$ korunami a pravdepodobnosť jeho výhry je q. Hra končí v momente keď jeden z hráčov príde o celý svoj kapitál, teda je zruinovaný.

3. Martingaly

V nasledujúcej kapitole budeme smerovať k definovaniu martingalov a dokázaniu niekoľkých teoretických výsledkov s cieľom ich aplikovania na náhodnú prechádzku.

Definícia 3.1 *Nech* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravdepodobnostný priestor a* $T \subset \mathbb{R}$ *je neprázdna indexová množina. Systém* $\{F_t, t \in T\}$ σ*-algebier takých, že* $F_t \subseteq \mathcal{A}$ *nazveme filtráciou práve vtedy, keď pre* $\forall s < t,\ s, t \in T$ *platí* $F_s \subset F_t$*.*

Definícia 3.2 *Hovoríme, že stochastický proces* $\{X_t, t \in T\}$ *je adaptovaný na filtráciu, ak pre* $\forall t \in T$ *je* $\sigma(X_t) \subset F_t$ *inými slovami* X_t *je* F_t *merateľná náhodná veličina. Hovoríme, že náhodný proces* $\{X_t, t \in T\}$ *je* F_t*- adaptovaný.*

Definícia 3.3 *Nech* $\{X_t, t \in T\}$ *je náhodný proces a* $\{F_t, t \in T\}$ *filtrácia definovaná predpisom pre* $s, t \in T$

$$F_t = \sigma(X_s, s \leq t).$$

Potom filtráciu $\{F_t, t \in T\}$ *náhodného procesu* $\{X_t, t \in T\}$ *nazývame prirodzenou filtráciou .*

V ďalšom texte budeme uvažovať indexovú množinu T ako podmnožinu nezáporných celých čísel.

Definícia 3.4 *Nech* $\{F_t, t \in T\}$ *je filtrácia a* $\{X_t, t \in T\}$ *je* F_t*- adaptovaný náhodný proces. Náhodný proces* $\{X_t, t \in T\}$ *nazveme martingalom ak platia nasledujúce vlastnosti:*

$$E[|X_t|] < \infty \qquad \forall t \in T, \tag{3.1}$$

$$E[X_t \mid F_{t-1}] = X_{t-1} \ \ s.j. \qquad \forall t, t-1 \in T. \tag{3.2}$$

Poznámka 3.1 V ďalšom texte budeme pracovať s prirodzenou filtráciou, preto ak nie je uvedené inak, pod pojmom filtrácia budeme rozumieť prirodzenú filtráciu.

Príklad 3.1

Nech $X_1, X_2, ...$ sú nezávislé náhodné veličiny. Nech

$$E[|X_n|] < \infty \quad a \quad E[X_n] = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definujme pre $n \in \mathbb{N}$

$$S_0 := 0, \qquad S_n := X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

$$F_0 := \{\emptyset, \omega\}, \qquad F_n := \sigma(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Chceme dokázať, že takto definovaná postupnosť $\{S_n, n \geq 0\}$ je martingal. Overme teda vlastnosti (3.1) a (3.2) z definície. Počítajme pre $n \geq 0$

$$E[|S_n|] \leq E[|X_1|] + E[|X_2|] + ... + E[|X_n|] < \infty.$$

Overili sme vlastnosť (3.1).
Ďalej z nezávislosti náhodných veličín a z toho, že ich stredná hodnota je nulová platí pre $n \geq 1$

$$\begin{aligned} E[S_n \mid F_{n-1}] &= E[S_{n-1} + X_n \mid F_{n-1}] \\ &= E[S_{n-1} \mid F_{n-1}] + E[X_n \mid F_{n-1}] \\ &= S_{n-1} + EX_n \\ &= S_{n-1} \;\; s.j. \end{aligned}$$

Overili sme vlastnosť (3.2).

Postupnosť $\{S_n, n \geq 0\}$ je teda martingal adaptovaný na filtráciu $\{F_n, n \geq 0\}$. Uvedomme si, že opísaná postupnosť $\{S_n, n \geq 0\}$ predstavuje symetrickú náhodnú prechádzku začínajúcu v nule ($S_0 = 0$).

3.1 Optional stopping theorem

V nasledujúcej podkapitole sa budeme zaoberať vetou, ktorá je v literatúre známa pod názvom Optional stopping theorem. Uvádzame originálny názov v angličtine bez prekladu, pretože doteraz neexistuje žiadny všeobecne zaužívaný preklad názvu tejto vety do slovenského resp. českého jazyka.

Definícia 3.5 *Nech $\{F_t, t \in T\}$ je filtrácia a $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$. Potom τ nazývame Markovský čas vzhľadom k filtrácii $\{F_t, t \in T\}$, ak pre $\forall t \in T$ je*

$$[\tau \leq t] \in F_t.$$

Pripomeňme, že v celej tejto kapitole uvažujeme indexovú množinu T ako podmnožinu nezáporných celých čísel. Vzhľadom na to, je možné prechádzajúcu definíciu ekvivalentne prepísať nasledujúcim spôsobom.

Lemma 3.1 *Nech* $\{F_t, t \in T\}$ *je filtrácia a* $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$. *Potom* τ *je Markovský čas vzhľadom k filtrácii* $\{F_t, t \in T\}$, *ak pre* $\forall t \in T$ *je*

$$[\tau = t] \in F_t.$$

Dôkaz. Nech τ je Markovský čas vzhľadom k filtrácii $\{F_t, t \in T\}$, potom platí

$$[\tau = t] = [\tau \leq t] \setminus [\tau \leq t-1] \in F_t.$$

Nech teraz naopak platí, že pre $\forall t \in T$ je $[\tau = t] \in F_t$. Kedže pre $k \in T$ také, že $k \leq t$ máme $[\tau = k] \in F_k \subseteq F_t$. Potom

$$[\tau \leq t] = \bigcup_{0 \leq k \leq t} [\tau = k] \in F_t.$$

$\square$

Intiutívne môžeme čas τ chápať ako čas, ktorý zavisí len na udalostiach do času t vrátane. Predstavme si, že máme náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ adaptovaný na prirodzenú filtráciu $\{F_t, t \in T\}$, o tom či $\tau = t$ alebo nie dokážeme rozhodnút len na základe hodnôt $X_i, i \leq t$.

Príklad 3.2
Nech $\{X_n, n \geq 0\}$ je náhodný proces adaptovaný na $\{F_n, n \geq 0\}$. Označme $\mathcal{B}$ systém borelovských množín v $\mathbb{R}$. Nech množina $B \in \mathcal{B}$. Definujme

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}.$$

Čas τ chápeme ako čas prvého vstupu procesu $\{X_n, n \geq 0\}$ do množiny B. Podľa konvencie platí, že $\inf(\emptyset) = \infty$ a teda $\tau = \infty$ v prípade, že proces $\{X_n, n \geq 0\}$ do množiny B nikdy nevstúpi. Pre $n \geq 0$ máme

$$[\tau = n] = [X_0 \notin B] \cup [X_1 \notin B] \cup [X_2 \notin B] \cup ... \cup [X_{n-1} \notin B] \cup [X_n \in B] \in F_n.$$

Z toho vyplýva, že τ je Markovský čas.

Veta 3.1 *Nech* $\{F_n, n \geq 0\}$ *je filtrácia. Buď* τ *Markovský čas vzhľadom k filtrácii* $\{F_n, n \geq 0\}$ *a* $\{X_n, n \geq 0\}$ F_n*-adaptovaný martingal. Potom platí*

$$E[X_0] = E[X_\tau]$$

v každej z nasledujúcich situácií:

(i) pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ je $\tau(\omega) \leq n, \forall \omega \in \Omega$, inak povedané čas τ je ohraničený;
(ii) pre nejaké $K \in \mathbb{R}^+$ je $|X_n(\omega)| \leq K$ pre $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega$ a zároveň je τ s.j. konečný;
(iii) $E[\tau] < \infty$, a pre nejaké $k \in \mathbb{R}^+$ a pre $\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$ je

$$|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq k.$$

Ako sme už dopredu avizovali, táto veta sa nazýva Optional stopping theorem. V tomto texte uvádzame iba časť tejto vety, ktorú budeme využívať v nasledujúcej podkapitole. Úplnú verziu vety aj s dôkazom je možné nájsť v knihe [14] v sekcii 10.10.

3.2 Aplikácia na náhodnú prechádzku

Ako sme si ukázali v predchádzajúcom texte, náhodná prechádzka je martingal. Preto sa v tejto podkapitole budeme venovať náhodnej prechádzke z pohľadu martingalov. V prvej časti odvodíme všeobecnejší vzorec pre absorpčné pravdepodobnosti v hre hráča proti kasínu pomocou Optional stopping theorem. V druhej podkapitole ukážeme jeden zaujímavý príklad s aplikáciou na náhodné prechádzky, ktorý vyriešime pomocou teoretických znalostí o martingaloch.

Uvažujme jednoduchú symetrickú náhodnú prechádzku začínajúcu v nule. Označme pre $k \in \mathbb{Z}$
$$\tau_k = \inf\{n \geq 0 : S_n = k\}.$$
V Príklade 3.2 zoberieme $B = \{k\}$ z čoho vidíme, že čas τ_k je Markovským časom. Z podkapitoly 1.4 vieme, že náhodná prechádzka má všetky stavy trvalé. Z toho vyplýva, že aj stav k je trvalý a náhodná prechádzka ho navštívi počas svojej realizácie nekonečne mnohokrát. Dostávame pre $k \in \mathbb{Z}$, že

$$P(\tau_k < \infty) = 1.$$

Inými slovami symetrická náhodná prechádzka s pravdepodobnosťou jedna dosiahne v konečnom čase akýkoľvek bod $k \in \mathbb{Z}$. Teraz už máme všetko pripravené na to, aby sme mohli odvodiť absorpčné pravdepodobnosti za pomocí martingalov.

3.2.1 Absorpčné pravdepodobnosti

Táto podkapitola sa bude zaoberať zovšeobecnením výsledkov z druhej kapitoly. K rovnakej problematike však budeme tentokrát pristupovať úplne iným spôsobom. Ukážeme ako je možné využit martingaly na odvodenie výsledkov z kapitoly dva. Nech

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je symetrická náhodná prechádzka. Pripomeňme, že z Príkladu 3.1 ide o martingal adaptovaný na filtráciu $\{F_n, n \geq 0\}$, kde $F_0 := \{\emptyset, \omega\}$ a $F_n := \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$. Definujme pre $a, b \in \mathbb{N}$

$$T := \inf\{n \geq 0 : S_n = -a \text{ alebo } S_n = b\}.$$

Čas T je Markovským časom podľa Príkladu 3.2. V predchádzajúcej časti sme ukázali, že $P(\tau_k < \infty) = 1$, z čoho vyplýva, že $P(T < \infty) = 1$. Za týchto predpokladov môžeme aplikovať Vetu 3.1 časť (ii), pričom ako konštantu K berieme $K = \max\{a, b\}$. Dostávame rovnosť

$$E[X_T] = E[X_0] = 0.$$

Označme p pravdepodobnosť, že náhodná prechádzka dosiahne skôr hodnotu $-a$ ako b. Potom platí

$$0 = E[X_T] = p(-a) + (1-p)b,$$

z čoho plynie

$$p = \frac{b}{b+a}.$$

Tento výsledok vo všeobecnejšej forme sa zhoduje s výsledkom (2.5) z druhej kapitoly, kde sme sa podobnou situáciou zaoberali pre konkrétne absorpčné bariery A a 0, pričom hráč začínal hru s obnosom k teda $E[X_0] = k$.

Uvažujme aj naďalej symetrickú náhodnú prechádzku $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom postupnosť $\{Z_n, n \geq 0\}$, kde $Z_n = S_n^2 - n$, je taktiež martingal adaptovaný na filtráciu $\{F_n, n \geq 0\}$. Vlastnosť (3.1) vyplýva z toho, že $\{S_n, n \geq 0\}$ je martingal. Overme vlastnosť (3.2). Platí, že

$$\begin{aligned}
E[S_n^2|F_{n-1}] &= E[(S_n + S_{n-1} - S_{n-1})^2|F_{n-1}] \\
&= E[(S_n - S_{n-1})^2|F_{n-1}] + 2E[(S_n - S_{n-1})S_{n-1}|F_{n-1}] + E[S_{n-1}^2|F_{n-1}] \\
&= E[X_n^2|F_{n-1}] + 2E[X_n S_{n-1}|F_{n-1}] + E[S_{n-1}^2|F_{n-1}] \\
&= 1 + 0 + S_{n-1}^2 \quad s.j.
\end{aligned}$$

Z toho

$$E[Z_n|F_{n-1}] = E[S_n^2|F_{n-1}] - n = S_{n-1}^2 - (n-1) = Z_{n-1} \quad s.j.$$

Z predchádzajúcej časti poznáme pravdepodobnosť p. Potom z Vety 3.1 máme rovnosť

$$0 = E[Z_T] = [pa^2 + (1-p)b^2] - E[T],$$

z čoho úpravou dostávame

$$E[T] = ab.$$

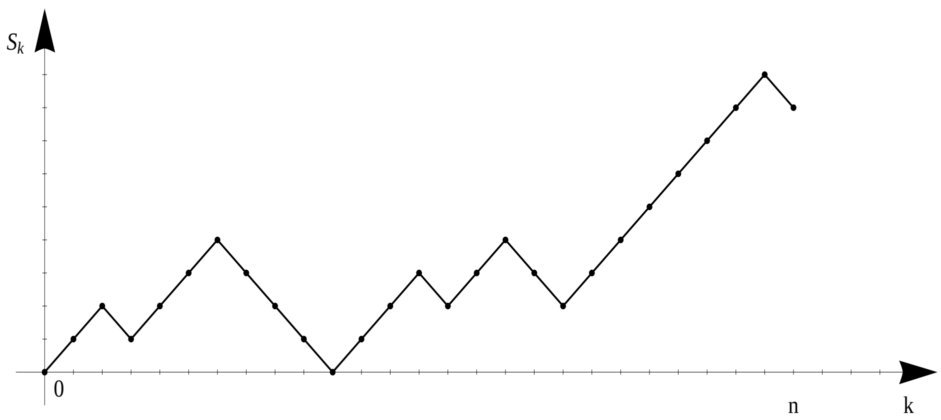
Tento výsledok je rozšírením výsledku (2.6) z druhej kapitoly.

Poznámka 3.2 Podobným spôsobom je možné odvodiť absorpčné pravdepodobnosti pre nesymetrickú verziu náhodnej prechádzky s využitím $\{Y_n, n \geq 0\}$, kde $Y_n = (\frac{q}{p})^{S_n}$. Dôkaz, že $\{Y_n, n \geq 0\}$ je martingal je obdobný s predchádzajúcimi dôkazmi tohoto typu.

3.2.2 Volebný problém

V tejto časti za budeme zaoberať jednou z ďalších aplikácií Vety 3.1. Nasledujúci príklad sa v literatúre najčastejšie objavuje pod názvom Ballot theorem.

Predstavme si voľby, v ktorých kandidujú dvaja kandidáti. Dokopy bolo voličmi odovzdaných n hlasov. Jeden z kandidátov získa a hlasov, nazvime ho kandidát A. Druhý kandidát, kandidát B získa $b := n - a$ hlasov, pričom budeme predpokladať, že $b < a$. Vo voľbách teda vyhral kandidát A. Nás bude zaujímať, čo sa dialo počas spočítavania hlasov. Uvažujme situáciu kde $a, b \geq 1$. Hlasy sa spočítavajú v náhodnom poradí, pričom sú vyberané náhodne s rovnakou pravdepodobnosťou zo všetkých možných permutácii n odovzdaných hlasov. Bude nás zaujímať s akou pravdepodobnosťou bude počas celého spočítavania hlasov mať kandidát A viac hlasov ako kandidát B. Pre indexy $l = 1, 2, ..., n$ označme S_l ako počet hlasov, o ktoré kandidát A vedie po spočítaní l hlasov, S_l môže byť aj záporné. Potom máme $S_n = a - b$. Obr. 3.1 predstavuje ilustráciu danej situácie. V tomto konkrétnom prípade A nevedie počas úplne celého spočítavania hlasov.



Obr. 3.1: Spočítavanie hlasov

Definujme pre $k = 0, 1, ..., n-1$
$$Y_k = \frac{S_{n-k}}{n-k}.$$
Najskôr ukážeme, že postupnosť $Y_0, ..., Y_{n-1}$ predstavuje martingal adaptovaný na prirodzenú filtráciu $\{F_k, k = 0, 1, ..., n-1\}$. Podmienka (3.1) je splnená automaticky, overme teda podmienku (3.2). Chceme vyjadriť čomu sa rovná podmienená stredná hodnota pre $k = 1, ..., n-1$
$$E[Y_k|F_{k-1}].$$
V tomto prípade podmieňujeme hodnotami $Y_0, Y_1, ..., Y_{k-1}$. Vzhľadom na to, ako sme definovali Y_k, je to rovnaké ako podmieňovať podľa $S_n, S_{n-1}, ..., S_{n-k+1}$, čo je ekvivalentné s podmieňovaním pri spočítaní posledných $k-1$ hlasov.

Vyjadrime počet hlasov, ktoré má kandidát A po spočítaní k hlasov. Nech v spočítaných k hlasoch je a_k hlasov pre kandidáta A a b_k pre kandidáta B. V prípade, že $k = n$ máme $a = a_k$ a $b = b_k$. Potom platia nasledujúce dve rovnosti
$$a_k + b_k = k \text{ a zároveň } a_k - b_k = S_k.$$
Z toho dostávame počet hlasov kandidáta A po spočítaní k hlasov v tvare
$$\frac{k + S_k}{2}. \tag{3.3}$$
Počet hlasov kandidáta B je
$$\frac{k - S_k}{2}. \tag{3.4}$$

Poznamenajme, že $S_k = S_{k+1} \pm 1$, podľa toho, či $k+1$-ty spočítaný hlas bol pre kandidáta B alebo kandidáta A. Potom platí
$$P(S_k = S_{k+1} - 1|S_{k+1}) = \frac{k + 1 + S_{k+1}}{2(k+1)}. \tag{3.5}$$
Vzťah (3.5) vyplýva z nasledujúcej úvahy. Vieme, že kandidát A vedie po spočítaní $k+1$ hlasov o S_{k+1}. Chceme pravdepodobnosť, že kandidát A po spočítaní k hlasov viedol o jeden hlas menej, inak povedané $S_k = S_{k+1} - 1$. Z (3.3) odvodíme počet hlasov pre kandidáta A po spočítaní $k+1$ hlasov. Potom pravdepodobnosť, že $k+1$ hlas bol pre kandidáta A je taká istá ako pravdepodobnosť, že náhodne vybraný hlas z $k+1$ hlasov je pre kandidáta A. Analogicky pre kandidáta B s využitím (3.4) dostávame
$$P(S_k = S_{k+1} + 1|S_{k+1}) = \frac{k + 1 - S_{k+1}}{2(k+1)}.$$

Označme

$$p_{\pm 1} = P(S_{n-k} = S_{n-k+1} \pm 1 | S_{n-k+1}).$$

Potom pre $k \geq 1$ dostávame

$$\begin{aligned} E[S_{n-k}|S_{n-k+1}] &= (S_{n-k+1}+1)p_{+1} + (S_{n-k+1}-1)p_{-1} \\ &= (S_{n-k+1}+1)\frac{n-k+1-S_{n-k+1}}{2(n-k+1)} + (S_{n-k+1}-1)\frac{n-k+1+S_{n-k+1}}{2(n-k+1)} \\ &= S_{n-k+1}\frac{n-k}{n-k+1} \quad s.j. \end{aligned}$$

Z toho po dosadení vyplýva, že sa v skutočnosti jedná o martingal, pretože

$$\begin{aligned} E[Y_k|F_{k-1}] &= E\left[\frac{S_{n-k}}{n-k}|S_n, S_{n-1}, ..., S_{n-k+1}\right] \\ &= \frac{S_{n-k+1}}{n-k+1} \\ &= Y_{k-1} \quad s.j. \end{aligned}$$

Definujme čas T ako

$$T = \begin{cases} \min\{k = 1, 2..., n-1 : Y_k = 0\} & \text{ak existuje také } k, \\ n-1 & \text{inak.} \end{cases}$$

Takto definovaný čas T je ohraničený v zmysle Vety 3.1 a je to Markovský čas. Preto z Vety 3.1 dostávame, že

$$E[Y_T] = E[Y_0] = \frac{E[S_n]}{n} = \frac{a-b}{a+b}. \tag{3.6}$$

Pri spočítavaní hlasov môžu nastať dve situácie:

- Kandidát A počas celého spočítavania vedie. Nech táto situácia nastane s pravdepodobnosťou P_1. Potom Y_k pre $k = 0, 1, ..., n-1$ môžu byť len kladné. Z toho vyplýva, že $T = n-1$, naviac kandidát A musí získať prvý hlas na to, aby mohol počas celého spočítavania hlasov viesť a preto

$$Y_T = Y_{n-1} = S_1 = 1.$$

- Kandidát A nevedie počas celého spočítavania hlasov. Nech takáto situácia nastane s pravdepodobnosťou P_2. Existuje teda $k < n-1$, že $Y_k = 0$. Z toho vyplýva, že

$$Y_T = 0.$$

S využitím (3.6) máme

$$\frac{a-b}{a+b} = E[Y_T] = 1 \times P_1 + 0 \times P_2,$$

z čoho

$$P_1 = \frac{a-b}{a+b}.$$

Alternatívne riešenia tohoto problému je možné nájsť v [11]. Teraz môžeme tento príklad jednoducho transformovať na problém týkajúci sa náhodnej prechádzky. Na začiatku sme definovali veličinu S_l ako počet hlasov, o ktoré vedie kandidát A po spočítaní l hlasov. Uvedomme si, že S_l, pre $l = 1, 2, ..., n$ vzniká spočítaním jednotiek a mínus jednotiek. Jednotka sa pripočíta v prípade, že práve započítaný hlas je pre kandidáta A a naopak mínus jednotka sa k sume pridá ak ide o hlas pre kandidáta B. Vzhľadom na to, že sme predpokladali, že hlasy sú vyberané náhodne s rovnakou pravdepodobnosťou, opísali sme vlastne model jednoduchej symetrickej náhodnej prechádzky začínajúcej v nule. Chceme zistiť pravdepodobnosť, že takto definovaná náhodná prechádzka nikdy neprejde cez nulu do času n, čo v reči podmienenej pravdepodobnosti, berúc do úvahy predchádzajúci výsledok dáva

$$P(S_l > 0, l = 1, 2..., n-1 | S_n = a-b) = \frac{a-b}{a+b}.$$

Záver

Táto práca čitateľovi predstavuje model náhodnej prechádzky a zoznamuje ho s viacerými možnosťami jej štúdia. Sústreduje sa na vysvetlenie a dôkaz niekoľkých základných teoretických vlastností náhodnej prechádzky.

Prvá kapitola je zameraná na návrat symetrickej náhodnej prechádzky do počiatku a s tým spojenú klasifikáciu jej stavov v jednej i dvoch dimenziách.

Druhá kapitola sa zaoberala nesymetrickou verziou náhodnej prechádzky s aplikáciou na príklad hry v kasíne. Odvodili sme absorpčné pravdepodobnosti a strednú dobu trvania hry. Záver kapitoly je ilustrovaný konkrétnymi výsledkami.

V poslednej kapitole sa nám podarilo dokázať, že náhodná prechádzka môže byť chápaná ako martingal. Následne sme sa z pohľadu tejto všeobecnejšej matematickej štruktúry dostali k vyriešeniu volebného problému, ktorý sme aplikovali na náhodnú prechádzku. K Ballot theorem sa častejšie pristupuje kombinatoricky, no v tomto texte je uvádzaný elegantný alternatívny prístup.

Z práce vyplýva, že pozerať sa na náhodnú prechádzku ako na martingal je nielen zaujímavý spôsob chápania tohto matematického modelu, no býva častokrát i veľmi šikovnou voľbou. Ako napríklad v prípade absorpčných pravdepodobností, odvodených v tretej kapitole bez dlhších výpočtov, ktoré boli nutné v kapitole druhej.

Zoznam použitej literatúry

[1] Anděl, Jiří. *Matematika náhody.* Praha: MATFYZPRESS, 2000. ISBN 80-85863-52-9.

[2] Berg, Howard C. *Random Walks in Biology.* New Jersey: Princeton University Press, 1993. ISBN 0-691-00064-6.

[3] Dupač, Václav, Hušková, Marie. *Pravděpodobnost a Matematická Statistika.* Praha:Karolinum, 1999. ISBN 80-246-0009-9.

[4] Durrett, Rick. *Probability: Theory and Examples.* 4. vydání. New York: Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-0-521-76539-8.

[5] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, I.* 3. vydání. New York: Wiley, 1968. ISBN 978-0-471-25708-0.

[6] Goel, Narendra S., Richter-Dyn, Nira. *Stochastic Models in Biology.* New York: Academic Press, 1974. ISBN 0-122-87460-9.

[7] Graham, Ronald L., Knuth, Donald E., Patashnik, Oren. *Concrete Mathematics: a foundation for computer science.* 1. vydání. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1988. ISBN 0-201-14236-8.

[8] Grimmett, Geoffrey R., Stirzaker, David R. *Probability and Random Processes.* 3. vydání. New York: Oxford University Press, 2001. ISBN 0-19-857223-9.

[9] Grinstead, Charles M., Snell, J. Laurie. *Introduction to Probability.* 2. vydání. New York: American Mathematical Society, 1997. ISBN 0-82-180749-8.

[10] Prášková, Zuzana, Lachout, Petr. *Základy Náhodných Procesů.* Praha: Karolínum, 1998. ISBN 80-7184-688-2.

[11] Renault, Marc, *Four Proofs of the Ballot Theorem.* Mathematics Magazine. December 2007, vol. 80, 345-352.

[12] Mitzenmacher, Michael, Upfal, Eli. *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis.* Cambridge: Cambridge University Press, 2005. ISBN 0-521-83540-2.

[13] Van Kampen, N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry.* 3. vydání. Amsterdam: North-Holland, 2007. ISBN 0-444-52965-7.

[14] Williams, David. *Probability with Martingales.* Cambridge: Cambridge University Press, 1991. ISBN 0-521-40605-6.